Mechanische Schwingungen:

1. a) $f_0 = 1\,Hz \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{D/m} \quad \Rightarrow \quad D = 9870\ N/m$

   b) $v = 8\ m/s$

2. a) $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{g/\ell} \quad \Rightarrow \quad \ell = 99{,}4\ cm$

   b) $m \cdot g \cdot h_{max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_{max}} = 1{,}4\ m/s$

   c) Äquator: $\ell = 99{,}2\ cm$; Pol: $\ell = 99{,}6\ cm$; Mond: $\ell = 16{,}5\ cm$

3. $\frac{1}{2} m v_{max}^2 = m \cdot g \cdot h_{max} \quad \Rightarrow \quad v_{max} \geq \sqrt{2 \cdot g \cdot h_{max}} \geq 14\ m/s$

4. a) $F_r(x) = F_A(x) = \underbrace{\pi r^2 2x \cdot \rho}_{} \cdot g$, also ist F_r proportional zur Auslenkung

   Masse des verdrängten Wassers bei Eintauchtiefe x des Reagenzglasschwerpunkts (!)

   Herleitung DGL über Energiebetrachtung:

   In der Ruhelage ist das Glas so weit eingetaucht, dass die Masse des verdrängten Wassers gerade der Masse m_R des Reagenzglases entspricht. Durch den Auftrieb ist seine „effektive" Masse dann gleich 0, daher auch seine potentielle Energie. Bei Bewegung nach oben nimmt die „effektive" Masse zu und zwar um die Masse des Wassers, die beim Auftauchen nachströmen kann; beim Eintauchen ist es umgekehrt.

   $$\Rightarrow \quad E_{pot} = m_{eff} \cdot g \cdot x = \pi r^2 \rho \cdot x \cdot g \cdot x = \pi r^2 \rho g \cdot x^2$$

   Für E_{kin} ist die Reagenzglasmasse m_R ausschlaggebend. Zwar wird das Glas durch den Auftrieb effektiv „leichter", aber auch das Wasser muss sich bewegen, so dass in der Summe immer eine Masse m_R in Bewegung ist.

   $$\Rightarrow \quad E_{kin} = \frac{1}{2} m_R \cdot \dot{x}^2$$

   Ansatz $\frac{d}{dt}(E_{kin} + E_{pot}) = 0$ liefert dann:

   $$\underbrace{2\pi r^2 \rho g \cdot x}_{\text{rücktreibende Kraft } F_r \text{ bzw. } F_A\text{, siehe oben}} + m_R \cdot \ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2\pi r^2 \rho g}{m_R}}$$

   $$\Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2\pi m_R}{r^2 \rho g}}$$

   b) Bei einem konischen Stopfen ist $F_r = F_A$ nicht mehr proportional zur Eintauchtiefe x, weil der Stopfen, je nach Lage, zunehmend mehr oder weniger Wasser beim Eintauchen verdrängt. Es ergibt sich dann keine harmonische Schwingung mehr.

5. a) an Luft: $\omega = \sqrt{D/m} = 6{,}32\ \frac{1}{s}$

in Wasser: $m_{eff} = m - \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho = 216{,}5\ g$ Auftriebskorrektur

$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{D/m_{eff}} = 6{,}80\ \frac{1}{s}$ noch ohne Reibungskorrektur

b) $m_{eff} \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + D \cdot x = 0$

mit Reibungs- oder Dämpfungskonstante $k = 6\pi\eta r$. Der Ansatz $x(t) = x_0\, e^{i\omega t}$ liefert:

$$-\omega^2 \cdot \cancel{x_0 e^{i\omega t}} \cdot m_{eff} + i\omega \cdot \cancel{x_0 e^{i\omega t}} \cdot k + \cancel{x_0 e^{i\omega t}} \cdot D = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 - \frac{ik}{m_{eff}}\,\omega - \frac{D}{m_{eff}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = +\frac{ik}{2m_{eff}} \pm \sqrt{-\frac{k^2}{4m_{eff}^2} + \frac{D}{m_{eff}}}$$

und dies eingesetzt in $x(t) = x_0\, e^{i\omega t}$:

$$x(t) = x_0 \cdot \underbrace{e^{-\frac{k}{2m_{eff}} \cdot t}}_{\text{exponentielle Dämpfung}} \cdot \underbrace{e^{i\sqrt{\frac{D}{m_{eff}} - \frac{k^2}{4m_{eff}^2}} \cdot t}}_{\text{Schwingung mit verringerter Frequenz}}$$

Frequenz: $\omega' = \sqrt{\frac{D}{m_{eff}} - \frac{k^2}{4m_{eff}^2}}$

c) Der Dämpfungsfaktor muss also den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen:

$$e^{-\frac{k}{2m_{eff}} \cdot t} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{2m_{eff}} \cdot t = \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad t = 796{,}1\ s$$

6. a) $x(t) = x_0 \cdot \sin(2\pi f \cdot t) \quad \Rightarrow \quad v(t) = 2\pi f \cdot x_0 \cdot \cos(2\pi f \cdot t)$

bzw. $x(t) = x_0\, e^{i \cdot 2\pi f \cdot t} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \underbrace{2\pi f \cdot x_0}_{v_{max}} \cdot i\, e^{i \cdot 2\pi f \cdot t}$

$\Rightarrow \quad v_{max,1} = 6{,}28\ \frac{mm}{s}$ und $v_{max,2} = 6{,}28\ \frac{m}{s}$

b) Schwingungsenergie: $E_s = \frac{1}{2} m v_{max}^2$

Leistung: $P = \frac{\frac{1}{2} E_s}{T} = \frac{\frac{1}{4} m v_{max}^2}{\frac{1}{f}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot m \cdot 4\pi^2 f^2 \cdot x_0^2}{\frac{1}{f}} = m\pi^2 f^3 x_0^2$

$\Rightarrow \quad P_1 = 9{,}87 \cdot 10^{-5}\ \frac{m^2}{s^3} \cdot m$ und $P_2 = 98696\ \frac{m^2}{s^3} \cdot m$

Lautsprechermasse bzw. Masse der schwingenden Membran

Elektromagnetische Schwingungen

1. a) $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 3{,}54\ \text{MHz}$ bzw. $f = 563\ \text{kHz}$

   b) $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} \iff L = \frac{1}{(2\pi f)^2 \cdot C} = 8443\ \text{H}$ sehr viel!

2. $f_{min} = 87\ \text{MHz} \Rightarrow C_{max} = \frac{1}{(2\pi f)^2 \cdot L} = 2{,}79 \cdot 10^{-15}\ \text{F}$

   $f_{max} = 108\ \text{MHz} \Rightarrow C_{min} = 1{,}81 \cdot 10^{-15}\ \text{F}$

3. a) $\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \Rightarrow \omega' = 3{,}536\ \text{MHz}$ im Vergleich zu $\omega = 3{,}536\ \text{MHz}$

   ↪ geringer Widerstand ohne merklichen Effekt auf ω.

   b) Dämpfungsterm: $e^{-\frac{R}{2L}\cdot t} = 0{,}9 \iff t = -\ln 0{,}9 \cdot \frac{2L}{R} = 4{,}68 \cdot 10^{-5}\ \text{s}$

   ↪ aber die Amplitude nimmt bereits nach $46{,}8\ \mu s$ auf 90% des Anfangswertes ab!

4. a) mechanisch: $E_{pot} = \frac{1}{2}Dx^2$ bzw. $E_{pot} = m \cdot g \cdot (1-\cos\varphi)\cdot l$

   Federpendel / Fadenpendel

   $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ / $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

   elektromagnetisch: $E_{el} = \frac{1}{2}\cdot C \cdot U^2$ und $E_{mag} = \frac{1}{2}\cdot L \cdot I^2$

   kontinuierliche Energieumformung während Schwingung $E_{pot} \leftrightarrow E_{kin}$ bzw. $E_{el} \leftrightarrow E_{mag}$. Grundsätzlich gilt Energieerhaltung: $\frac{d}{dt}(\sum E) = 0$

   b) $v_{max} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_{max}}$

   c) $\frac{1}{2}CU_{max}^2 = \frac{1}{2}LI_{max}^2 \iff U_{max} = \sqrt{L/C}\cdot I_{max}$

5. a) $T = 2\pi\sqrt{L \cdot C} = 6{,}88 \cdot 10^{-5}\ \text{s}$ und $\omega = 14529\ \frac{1}{s}$

   b) $Q_0 = C \cdot U_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{C}$ und $Q(t) = Q_0 \cdot e^{i\omega t}$ bzw. $Q(t) = Q_0 \cos(\omega t)$

   ↪ wichtig: $Q(t=0)$ muss Q_0 sein; siehe Aufgabenstellung!

   c) $I_{max} = U_0 \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = 1{,}095\ \text{A}$

   d) $\cos(\omega t) = \frac{1}{2} \iff \omega \cdot t = \frac{\pi}{3} \iff t = \frac{T}{6} = 1{,}15 \cdot 10^{-5}\ \text{s}$

   $\cos(\omega t) = 0 \iff \omega \cdot t = \frac{\pi}{2} \iff t = \frac{T}{4} = 1{,}72 \cdot 10^{-5}\ \text{s}$

   e) $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t)$ und $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$ → Phasenverschiebung um $\frac{\pi}{2}$

   f) Dämpfungsterm: $e^{-\frac{R}{2L}\cdot t} = \frac{1}{2} \iff t = \ln 2 \cdot \frac{2L}{R} = 2{,}08 \cdot 10^{-4}\ \text{s}$