

# Eine kurze Einführung in die Fehlerrechnung für die experimentelle Praxis

---

## Theoretischer Hintergrund

Wenn eine physikalische Größe  $f$  von einer (messbaren) Größe  $x$  abhängt, mathematisch gesprochen also ein bekannter funktionaler Zusammenhang der Form  $f = f(x)$  besteht, kann man  $f$  aus einer Messung von  $x$  berechnen. Die Messung einer Größe  $x$  ist allerdings grundsätzlich mit einem Messfehler  $\Delta x$  behaftet, um den der Messwert  $x$  vom „exakten“ Wert  $x_0$  abweicht:  $x = x_0 \pm \Delta x$ . Folglich weist auch die Bestimmung von  $f$  aus  $x$  eine Ungenauigkeit  $\Delta f$  auf:  $f = f_0 \pm \Delta f$ , wobei der exakte Wert  $f_0 = f(x_0)$  wäre.

Um den Einfluss  $\Delta f$  des Messfehlers  $\Delta x$  auf die Größe  $f$  zu ermitteln, betrachtet man, wie stark sich der Wert von  $f(x)$  ändert, wenn  $x$  in der Größenordnung  $\Delta x$  schwankt. Ein gutes Maß für die Änderung von  $f(x)$  ist die Steigung der Funktion an der Stelle  $x$ , die durch die erste Ableitung  $f'(x) = df/dx$  gegeben ist. Multipliziert man die Ableitung  $f'(x)$  mit dem Messfehler  $\Delta x$ , erhält man eine Schwankungsbreite  $\Delta f$ . Diesen Zusammenhang erkennt man direkt aus der Definition der Ableitung als Differenzenquotienten bzw. Differentialquotienten:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

Sofern zwei (oder mehr) Größen  $x, y$  gemessen werden müssen, um eine Größe  $f(x, y)$  bestimmen zu können, wirken sich die Messfehler aller einzelnen Messungen auf die Genauigkeit der Bestimmung aus. Für jede einzelne Messgröße  $x$  bzw.  $y$  ergibt sich die Ungenauigkeit  $\Delta f_x$  bzw.  $\Delta f_y$  aus der Ableitung multipliziert mit dem Messfehler  $\Delta x$  bzw.  $\Delta y$ :

$$\Delta f_x = \frac{df}{dx} \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad \Delta f_y = \frac{df}{dy} \cdot \Delta y$$

Um die Fehlerbreite  $\Delta f$  zu bestimmen, müssen beide Beiträge  $\Delta f_x$  und  $\Delta f_y$  berücksichtigt werden. Eine einfache Addition ist jedoch ungeeignet, weil sich dann Fehler mit unterschiedlichem Vorzeichen gegenseitig kompensieren würden. Eine statistische Behandlung des Problems zeigt, dass die Fehlerquadrate zu addieren sind und die Wurzel dieser Summe den Fehler  $\Delta f$  liefert:

$$\Delta f = \sqrt{(\Delta f_x)^2 + (\Delta f_y)^2}$$

Dieses Verfahren wird auch als „Fehlerfortpflanzung“ bezeichnet, weil es ein Maß für die Ungenauigkeit einer Größe  $f$  aus der Ungenauigkeit der Größen  $x, y$  liefert. In der Praxis wendet man also die folgende Formel an:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{df}{dx} \cdot \Delta x\right)^2 + \left(\frac{df}{dy} \cdot \Delta y\right)^2}$$

## Beispiele

### Bestimmung des Ortsfaktors $g$ aus Fallzeitmessungen

Für den freien Fall eines Körpers gilt unter Vernachlässigung der Luftreibung  $s(g,t) = \frac{1}{2} g t^2$ .

Aus einer Messung der Fallstrecke  $s$  und der Fallzeit  $t$  kann man also  $g$  bestimmen:

$g(s,t) = 2s/t^2$ . Für die Ermittlung der Messgenauigkeit  $\Delta g$  benötigt man die Ableitungen der Funktion  $g(s,t)$  nach  $s$  und  $t$ :  $dg/ds = 2/t^2$  und  $dg/dt = -4s/t^3$ . Die Messfehler  $\Delta s$  und  $\Delta t$  tragen zur Ungenauigkeit  $\Delta g$  bei gemäß:

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2} \cdot \Delta s\right)^2 + \left(\frac{4s}{t^3} \cdot \Delta t\right)^2}$$

Die Fehlerbreiten  $\Delta s$  und  $\Delta t$  der Messungen werden aus dem Experiment abgeschätzt. Eine Methode zur Abschätzung statistischer Messfehler ist, die Messung unter identischen Bedingungen mehrfach vorzunehmen und die Schwankung der Messresultate zu betrachten.

$s$					
$\Delta s$					
$t$					
$\Delta t$					
$g$					
$\Delta g$					

### Bestimmung des Ortsfaktors $g$ aus der Schwingungsdauer eines Fadenpendels

Ein Fadenpendel vollzieht eine harmonische Schwingung mit der Periodendauer

$T(l, g) = 2\pi\sqrt{l/g}$ . Folglich ergibt sich  $g$  aus der Messung der Periodendauer  $T$  und der Fadenlänge  $l$  gemäß:  $g(l, T) = 4\pi^2 \cdot l / T^2$ . Für die Ermittlung der Messgenauigkeit  $\Delta g$  benötigt man die Ableitungen der Funktion  $g(l, T)$  nach  $l$  und  $T$ :

$$dg/dl = 4\pi^2 / T^2 \quad \text{und} \quad dg/dT = -8\pi^2 l / T^3$$

Die Messfehler  $\Delta l$  und  $\Delta T$  tragen also zu  $\Delta g$  bei:  $\Delta g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{-8\pi^2 l}{T^3} \Delta T\right)^2}$

$l$					
$\Delta l$					
$T$					
$\Delta T$					
$g$					
$\Delta g$					